VI. Формулы половинного аргумента (знак – по функции в левой части)**:**

1. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ 2. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

3. $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$

VII. Формулы сумм:

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

5. $\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$

6. $\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$

VIII. Формулы произведений:

1. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$

2. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$

3. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big)$

IX. Универсальная тригонометрическая подстановка:

1. $\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 2. $\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$

X. Некоторые дополнительные формулы:

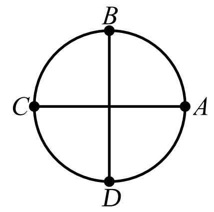
1. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=A\sin(\alpha+\varphi)$, где $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$

2. $\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\mp\alpha\right)$

1. Считая числовую окружность образом беговой дорожки стадиона, отметьте на ней конец дистанции: а) 1500 м; б) 42 км 195 м.

2. Дана окружность радиуса 1 см. Чему равна длина: а) всей окружности; б) ее половины; в) ее четверти?

> Горизонтальный диаметр *CA* и вертикальный диаметр *DB* разбивают единичную окружность на четыре четверти: *AB* – первая, *BC* – вторая, *CD* – третья, *DA* – четвертая.
> Опираясь на эту геометрическую модель, решите задачи № 3, 4, 5, 6, 7, 8.



3. Первая четверть разделена точкой *M* на две равные части, а точками *K* и *P* – на три равные части (точка *P* между *M* и *B*). Чему равна длина дуги: *AM*, *MB*, *AK*, *KP*, *PB*, *AP*, *KM*?

4. Вторая четверть разделена пополам точкой *M*, а третья четверть разделена на три равные части точками *K* и *P* (точка *P* между *K* и *D*). Чему равна длина дуги: *AM*, *BK*, *MP*, *DC*, *KA*, *BP*, *CB*, *BC*?

5. Вторая четверть разделена точкой *M* пополам, а четвертая четверть разделена на три равные части точками *K* и *P* (точка *P* между *K* и *A*). Чему равна длина дуги: *AM*, *AK*, *AP*, *PB*, *MK*, *KM*?

6. Первая четверть разделена на две равные части точкой *M*, а четвертая разделена на три равные части точками *K* и *P* (точка *P* между *K* и *A*). Чему равна длина дуги: *AM*, *BD*, *CK*, *MP*, *DM*, *MK*, *CP*, *PC*?

$\boxed{7}$. Третья четверть разделена точкой *P* в отношении 1 : 5. Чему равна длина дуги: *CP*, *PD*, *AP*?

$\boxed{8}$. Первая четверть разделена точкой *M* в отношении 2 : 3. Чему равна длина дуги: *AM*, *MB*, *DM*, *MC*?

9. Выразите в радианах:

1) 1°;	4) 10°;	7) 15°;	10) 30°;
2) 45°;	5) 60°;	8) 70°;	11) 90°;
3) 225°;	6) 240°;	9) 320°;	12) 330°.

10. Переведите из градусной меры в радианную:

1) 120°;	3) 220°;	5) 300°;	7) 765°;
2) 210°;	4) 150°;	6) 315°;	8) 675°.

11. Выразите в градусах:

1) $\frac{\pi}{15}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 10) $\frac{7\pi}{9}$;

2) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{11\pi}{6}$; 8) $1{,}5\pi$; 11) 3π;

3) $0{,}25\pi$; 6) $\frac{21}{4}\pi$; 9) $-\frac{31}{6}\pi$; 12) $\frac{101}{12}\pi$.

12. Переведите из радианной меры в градусную:

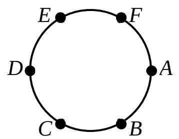
1) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{11\pi}{3}$; 5) $\frac{6\pi}{5}$; 7) $\frac{46\pi}{9}$;

2) $\frac{5\pi}{8}$; 4) $\frac{7\pi}{12}$; 6) $\frac{11\pi}{12}$; 8) $\frac{47\pi}{9}$.

13. Окружность разделена на шесть равных частей. Выразить в градусах и радианах сумму дуг:

1) $\cup AECBF + \cup EAB + \cup DCB$;

2) $\cup AFE + \cup EDC + \cup CD + \cup BD + \cup DCBA$.



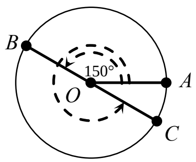
14. Угол A трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на 70° меньше угла B и на 10° больше угла D. Найдите радианную меру каждого из углов трапеции.

15. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

1°		**3°**		**5°**		**9°**		**12°**		**18°**		**30°**		**45°**		**90°**	
	$\frac{\pi}{90}$		$\frac{\pi}{45}$		$\frac{\pi}{30}$		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{9}$		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{3}$		π

16. Один из углов треугольника больше другого на 20° и меньше третьего на 50°. Найдите радианную меру каждого из углов этого треугольника.

17. Записать общий вид углов для случаев, когда конечный радиус их занимает положение: 1) OB; 2) OC и найти несколько частных значений этих углов.



18. В какой четверти находится конечная точка поворота на угол:

1) 220°; 3) –160°; 5) 906°;

2) 285°; 4) –290°; 6) 4825°?

19. Представьте в виде $\alpha_0 + 360° \cdot n$ ($\alpha_0 \in [0°; 360°)$, $n \in \boldsymbol{Z}$) углы:

1) 840°; 3) –1700°; 5) 3200°; 7) –2450°;

2) 1200°; 4) –3900°; 6) 3500°; 8) –3100°.

I. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
3. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
4. $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$; $\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$

II. Формулы (теоремы) сложения аргументов:

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$; $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
6. $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$; $\alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

III. Формулы приведения:

1) функция меняется на кофункцию при переходе через вертикальную ось и не меняется при переходе через горизонтальную;
2) перед приведенной функцией ставится знак приводимой функции, считая α углом первой четверти.

IV. Формулы двойного аргумента:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, *отсюда* $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
3. $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$
4. $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

V. Формулы понижения степени:

1. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$
2. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
3. $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
4. $\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

$\boxed{128}$. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит один из его катетов на отрезки 3 см и 4 см. Вычислите косинусы острых углов треугольника.

$\boxed{129}$. В квадрат со стороной *a* вписан другой квадрат так, что вершины второго квадрата лежат на сторонах первого, а сторона второго квадрата образует угол α со сторонами первого. Найдите сторону вписанного квадрата.

$\boxed{130}$. Пусть α, β и γ – углы некоторого треугольника. Докажите, что для них выполняются следующие соотношения:

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

3) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

4) $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

5) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;

6) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$;

7) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

8) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=-1+4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

9) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$;

10) $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$;

11) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=1$;

12) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=1$;

13) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

14) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

15) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;

16) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$;

17) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$.

20. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

1) $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$;

2) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

21. Отметьте на координатной окружности точки, соответствующие числам:

1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, π, 3π; 2) $-\frac{9\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

$\boxed{22}$. Какой четверти числовой окружности принадлежит число:

1) $\frac{19\pi}{4}$; 2) $-\frac{37\pi}{6}$; 3) 100?

23. Запишите три числа, которые изображаются на окружности той же точкой, что и $\frac{17\pi}{3}$.

$\boxed{24}$. Часы отстали на 18 минут. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время?

25. Переведите углы из градусной меры в радианную:

1) 36°; 3) –120°; 5) 870°; 7) –2510°;
2) 265°; 4) –135°; 6) 1020°; 8) –2940°.

26. Найдите радианную меру дуг:

1) 18°; 3) –252°; 5) 1530°;
2) 324°; 4) 828°; 6) –2490°.

27. Чему равна градусная мера углов:

1) $\frac{3\pi}{10}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $-\frac{11\pi}{15}$; 7) $\frac{35\pi}{18}$;
2) $\frac{19\pi}{16}$; 4) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{17\pi}{12}$; 8) $\frac{13\pi}{45}$?

28. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) $\frac{23\pi}{12}$; 3) $\frac{3\pi}{8}$; 5) $-\frac{11\pi}{9}$;
2) $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{9\pi}{5}$; 6) $-\frac{13\pi}{6}$.

29. Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

1) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$;
2) π; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{2\pi}{3}$;
3) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; -2π;
4) 2π; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

30. На числовой окружности укажите точку, соответствующую числу:

1) 7π; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{4}$;
2) 4π; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{25\pi}{6}$;
3) 10π; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{26\pi}{3}$;
4) 3π; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{16\pi}{3}$.

31. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая числу:

1) 6,1;
2) 5,4;
3) –4,3;
4) 2,8;
5) 3,2;
6) –5,1;
7) 4,8;
8) 1,4;
9) –2,8;
10) 31;
11) –17;
12) –95?

32. Какой четверти принадлежат точки:

1) $\frac{7\pi}{3}$;
2) $\frac{19\pi}{4}$;
3) $\frac{17\pi}{5}$;
4) $-\frac{8\pi}{7}$;
5) 4,3;
6) –3,3;
7) 20;
8) –100?

33. Как расположены на числовой окружности точки, соответствующие числам:

1) t и $-t$;
2) t и $t + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;
3) t и $t + \pi$;
4) $t - \pi$ и и $t + \pi$?

34. Ведро в колодце поднимается на 2 м, если рукоятка ворота повернута на пять полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро: 1) поднялось на 1,5 м? 2) опустилось на 1,25 м?

35. Вычислите:

1) $2\sin 30° - \operatorname{tg} 45° + \operatorname{ctg} 30°$;
2) $\operatorname{tg} 60° + 2\cos 45° - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 45°$;
3) $6\cos 30° - 3\operatorname{tg} 60° + 2\sin 45°$;
4) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 30° + 4\sin 30° - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 30°$;
5) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

122. Замените произведение тригонометрических функций суммой:

1) $\cos 52° \cos 22°$;
2) $2\sin 52° \cos 8°$;
3) $\sin 52° \sin 7°$;
4) $2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{4}$;
5) $\cos 50° \cos 58°$;
6) $\sin 31° \cos 41°$;
7) $2\sin 24° \sin 44°$;
8) $2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{14}$.

123. Упростите выражения:

1) $\cos 3\alpha \cos\alpha - \cos 7\alpha \cos 5\alpha$;
2) $\cos 3\alpha \cos\alpha - \sin 3\alpha \sin\alpha$;
3) $\sin 4\beta \cos 3\beta - \sin 5\beta \cos 2\beta$;
4) $\sin 4\beta \cos 3\beta - \cos 4\beta \sin 3\beta$.

124. Преобразуйте выражения:

1) $\cos 7\varphi \cos 3\varphi + \sin 8\varphi \sin 2\varphi$;
2) $\cos 7\varphi \cos 3\varphi + \sin 7\varphi \sin 3\varphi$.

125. Проверьте равенства:

1) $\cos 50° + 2\sin 40° \sin 10° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $2\sin 25° \cos 5° - \sin 20° = \frac{1}{2}$;
3) $\sin 5\alpha - 2\cos 4\alpha \sin\alpha = \sin 3\alpha$;
4) $2\cos 40° \cos 10° - \cos 50° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\sin 20° + 2\cos 25° \sin 5° = \frac{1}{2}$;
6) $\cos 3\alpha - 2\sin 2\alpha \sin 5\alpha = \cos 7\alpha$.

126. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 75°$;
2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2$;
3) $\operatorname{tg} 41° \operatorname{tg} 43° \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 47° \operatorname{tg} 49°$;
4) $\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 50° \operatorname{tg} 70°$;
5) $\sin^4\frac{3\pi}{8} - \cos^4\frac{3\pi}{8}$;
6) $\sin^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}$;
7) $\sin^6\frac{3\pi}{8} + \cos^6\frac{3\pi}{8}$;
8) $\cos^8\frac{\pi}{8} - \sin^8\frac{\pi}{8}$.

127. Вычислите значение выражения

$\frac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

116. Докажите тождество:

$$\frac{\cos^2 3x+\cos^2 4x-\sin^2 5x-\sin^2 6x}{\sin^2 3x-\sin^2 5x+\sin^2 4x-\sin^2 6x}=-\operatorname{ctg}2x\operatorname{ctg}9x.$$

117. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 5\gamma+\sin 3\gamma}{\sin 5\gamma-\sin 3\gamma}$; 5) $\frac{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha+\sin 3\alpha}{\cos 7\alpha+\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 8\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 8\alpha}$; 6) $\frac{\cos 6\alpha-\cos 4\alpha+\cos 2\alpha-\cos 8\alpha}{\sin 3\alpha-\sin\alpha}$;

3) $\frac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}$; 7) $\frac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos\alpha}$;

4) $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}{\sin 2\alpha-\cos\alpha}$; 8) $\frac{\cos\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

118. Вычислите:

1) cos 95° + cos 94° + cos 93° + cos 85° + cos 86° + cos 87°;

2) tg 9° – tg 27° – tg 63° + tg 81°;

3) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

119. Преобразуйте выражение:

$$\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\cdot\frac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}.$$

120. Тангенсы двух углов треугольника равны соответственно 1,5 и 5. Найдите третий угол треугольника.

121. Преобразуйте произведение в сумму:

1) sin 42° cos 12°; 5) cos 23° cos 27°;

2) cos 42° cos 18°; 6) 2 sin 18° sin 22°;

3) 2 sin 42° sin 3°; 7) sin 40° cos 56°;

4) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{10}$; 8) $2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10}$.

6) $2\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{6}-2\sin\frac{\pi}{4}$;

7) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

8) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

9) $2\sin\pi-\cos 0+\operatorname{tg}0+3\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{3}$;

10) $5\sin 90°+2\cos 0°-2\sin 270°+10\cos 180°$.

36. Найдите значение выражения:

1) $4\cos 60°+2\sin 45°-2\sqrt{3}\operatorname{tg}30°$;

2) $\sqrt{2}\cos 45°-3\sqrt{3}\operatorname{tg}60°+6\cos 30°$;

3) $2\cos\frac{\pi}{6}-4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{6}$;

4) $4\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-2\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{6}$;

5) $3\sin\frac{\pi}{2}+\cos 2\pi-4\operatorname{tg}0+\sin\pi+\cos\frac{\pi}{2}$;

6) 4cos 180° – 3sin 270° + 3sin 360° – ctg 90°.

37. (Устно). Существуют ли числа α, β и γ, для которых:

1) $\sin\alpha=-0{,}5$, $\cos\beta=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\gamma=-2{,}5$;

2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cos\beta=-2{,}2$, $\operatorname{tg}\gamma=0{,}31$;

3) $\sin\alpha=1{,}3$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma=5{,}2$?

38. Оцените выражение, т.е. укажите его наименьшее и наибольшее значение:

1) 1 + 2sin α; 4) 2sin x + 3; 7) 1 – 4cos^2x;

2) 4sin α + 1; 5) 2cos^{2}α; 8) 4 + cos(α – 15°);

3) 1 – 3cos α; 6) 5 + 2cos^2x; 9) 2 – sin (α – β).

39. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения:

1) 3sin x – 1; 3) 2cos x – 3; 5) 10 – 9sin^2x;

2) 2 + 3cos x; 4) 5 – 4sin x; 6) sin^2x – 5.

40. Определить, в какой четверти находится конечная точка поворота на угол α и каковы знаки $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если угол равен:

1) 260°;	3) 565°;	5) –915°;	7) 8760°;
2) 290°;	4) 480°;	6) –825°;	8) 8000°.

41. Определить знак каждого из данных произведений:

1) $\sin 100° \cdot \sin 132°$;
2) $\cos 210° \cdot \sin 115°$;
3) $\cos 285° \cdot \cos 316°$;
4) $\operatorname{tg} 112° \cdot \sin 165°$;
5) $\operatorname{ctg} 300° \cdot \sin 222°$;
6) $\sin 118° \cdot \cos 118° \cdot \operatorname{tg} 118°$;
7) $\sin 2{,}1 \cdot \operatorname{ctg} 2{,}1 \cdot \cos 2{,}1$;
8) $\cos 123° \cdot \operatorname{tg} 123° \cdot \sin 312°$.

42. Какой знак имеет произведение $\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi$, если число φ равно:

1) 4,1;   2) – 240°;   3) $\frac{7\pi}{6}$?

43. Вычислите:

1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sin(-\pi)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

44. Найдите значение выражения:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $\cos(-2\pi)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}(-\pi)$.

45. Найдите значение:

1) cos 2550°;	5) sin(–4005°);	9) cos(–2220°);
2) tg 2205°;	6) tg 3630°;	10) sin(–3555°);
3) sin 3300°;	7) ctg 2100°;	11) tg(–2460°);
4) ctg 2130°;	8) cos(–3210°);	12) ctg(–2115°).

46. Вычислите:

1) sin 2580°;	3) tg(–2835°);	5) ctg(–2565°);
2) ctg 2190°;	4) sin 2490°;	6) cos(–2820°).

109. Вычислите:

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

110. Известно, что $\sin\alpha=\frac{336}{625}$, где $\frac{5\pi}{4}<\alpha<3\pi$. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{4}$.

111. Вычислите $\sin\frac{\pi}{8}=\sin 22{,}5°$.

112. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{5}{13}$. Найдите синус угла при основании.

113. Преобразуйте сумму в произведение и упростите результат, если это возможно:

1) $\sin 50° + \sin 20°$;
2) $\cos 28° - \cos 12°$;
3) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$;
4) $\cos 160° + \cos 80°$;
5) $\sin 83° - \sin 23°$;
6) $\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}$;
7) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$;
8) $\sin 10° + \cos 40°$;
9) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{12}$.

114. Замените сумму произведением:

1) $\cos 40° - \cos 10°$;
2) $\sin 42° - \sin 26°$;
3) $\sin\frac{5\pi}{24}+\sin\frac{7\pi}{24}$;
4) $\cos 37° + \cos 23°$;
5) $\sin 130° + \sin 110°$;
6) $\sin\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}$;
7) $\cos 20° - \cos 70°$;
8) $\sin\beta - \sin 3\beta$;
9) $\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{10}$.

115. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$;

2) $\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x+\sin 3x}$;

3) $\frac{\sin 2\beta-\sin 3\beta}{\cos 2\beta-\cos 3\beta}$;

4) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}$;

5) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 7\alpha+\cos 11\alpha}$;

6) $\frac{\cos 4\alpha-\cos 6\alpha-\cos 10\alpha+\cos 8\alpha}{\cos 8\alpha-\cos 6\alpha}$;

7) $\frac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha-2\cos 3\alpha-\sin\alpha}$;

8) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 3\alpha}$.

99. Упростите выражения:

1) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 5) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; 6) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

$\boxed{\textit{100}}$. Преобразуйте следующие выражения:

1) $\sin^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)$;

2) $\dfrac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}$.

$\boxed{\textit{101}}$. Вычислите без помощи калькулятора или таблиц:

1) $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

Вычислите:

102. $\sin\left(2\alpha+\dfrac{5\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

103. $\cos\left(2\alpha+\dfrac{7\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

104. $\operatorname{tg}(4x-y)$, если $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{5}$, $\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{239}$.

$\boxed{\textit{105}}$. $(\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha)\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$.

106. Упростите выражение $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$.

107. Найдите значение выражения:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{13}+\sin^2\dfrac{11\pi}{26}$; 2) $\cos^2\dfrac{3\pi}{34}+\cos^2\dfrac{7\pi}{17}$.

108. Без помощи таблиц или калькулятора вычислите:

$\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$.

47. Определите:

1) $\sin\dfrac{37\pi}{6}$; 5) $\cos\dfrac{13\pi}{3}$; 9) $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{37\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\dfrac{31\pi}{6}$; 10) $\operatorname{ctg}\dfrac{49\pi}{4}$;

3) $\operatorname{ctg}\dfrac{47\pi}{4}$; 7) $\sin\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)$; 11) $\sin\left(-\dfrac{49\pi}{6}\right)$;

4) $\cos\dfrac{17\pi}{4}$; 8) $\operatorname{ctg}\dfrac{26\pi}{3}$; 12) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)$.

48. Вычислите:

1) $\cos\dfrac{19\pi}{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)$; 5) $\sin\dfrac{35\pi}{3}$;

2) $\sin\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)$; 4) $\cos\dfrac{59\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$.

49. С помощью тригонометрической окружности решите уравнения:

1) $\sin 6x=\dfrac{1}{2}$; 3) $\cos\dfrac{x}{5}=-\dfrac{1}{2}$; 5) $\sin\dfrac{x}{3}=0$;

2) $\sin\dfrac{3x}{5}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\dfrac{4x}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos 3x=-1$.

50. Используя единичную окружность, решите уравнения:

1) $\sin\dfrac{x}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos 6x=\dfrac{1}{2}$; 5) $\sin 3x=1$;

2) $\sin\dfrac{2x}{5}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos\dfrac{x}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos\dfrac{4x}{5}=0$.

51. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

1) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{12}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

52. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

1) $\cos\alpha=-0{,}6$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

53. Упростите выражения (предпочтительно устно):

1) $4\cos^2 3\alpha + 4\sin^2 3\alpha$; *2*) $2\sin^2 5\alpha + 2\cos^2 5\alpha$;
3) $1 - \sin^2 3x$; *4*) $1 - \cos^2 4\beta$;
5) $\sin^2 7y - 1$; *6*) $\cos^2 3t - 1$;
7) $2\sin^2 t - 1$; *8*) $1 - 2\cos^2 3\gamma$;
9) $\operatorname{tg} 3\beta \operatorname{ctg} 3\beta$; *10*) $\operatorname{ctg} 1{,}1 \cdot \operatorname{tg} 1{,}1$;
11) $\operatorname{tg}\alpha \cos\alpha$; *12*) $\sin 2\varphi \operatorname{ctg} 2\varphi$;
13) $\operatorname{ctg}^2\varphi \sin^2\varphi$; *14*) $\operatorname{tg}^2\alpha \cos^2\alpha$;
15) $\operatorname{tg}\gamma \cos\gamma \sin\gamma$; *16*) $\sin 2\alpha \cos 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$;
17) $(1 - \cos 3\beta)(1 + \cos 3\beta)$; *18*) $(1 - \sin 2\varphi)(1 + \sin 2\varphi)$;
19) $(\sin t + 1)(\sin t - 1)$; *20*) $(\cos 5\alpha - 1)(1 + \cos 5\alpha)$;
21) $\sin^2\gamma \cos^2\gamma + \cos^4\gamma$; *22*) $\sin^4\varphi + \sin^2\varphi \cos^2\varphi$;
23) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$;
24) $(3\sin t + 4\cos t)^2 + (4\sin t - 3\cos t)^2$.

54. Преобразуйте следующие выражения:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\beta$; 13) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha$;
2) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \cos^2 3\alpha$; 14) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^2 5\beta + \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t$; 15) $\sin^4\beta + \sin^2\beta \cos^2\beta + \cos^2\beta$;
4) $(1 - \sin^2 3\alpha)\operatorname{tg}^2 3\alpha$; 16) $\operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi \sin^2\varphi$;
5) $\operatorname{ctg}^2\beta(\cos^2\beta - 1) + 1$; 17) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$;
6) $1 + \cos^2\gamma - \sin^2\gamma$; 18) $\operatorname{ctg}^2 y\,(1 - \cos y)(1 + \cos y)$;
7) $1 - \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha$; 19) $(\operatorname{tg} x - 1)^2 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8) $(\operatorname{tg}\beta \cos\beta)^2 + (\operatorname{ctg}\beta \sin\beta)^2$; 20) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - (\operatorname{ctg} x + 1)^2$;
9) $2 - \cos^2\varphi \operatorname{tg}^2\varphi - \cos^2\varphi$; 21) $\dfrac{1 - \cos^2 7y}{\cos^2 7y}$;
10) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \cos^2\alpha$; 22) $\dfrac{1 - \sin^2 7\alpha}{1 - \cos^2 7\alpha} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{9}$;
11) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{\sin^2 3\gamma}$; 23) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos 0 + \cos x}$;
12) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$; 24) $\operatorname{tg}\gamma \dfrac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma - 1}$.

95. Упростите выражения:

1) $0{,}5 \sin 2\beta \operatorname{ctg}\beta$; 5) $\cos^2 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x$;
2) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$; 6) $2\sin^2 4\alpha + \cos 8\alpha + 1$;
3) $\cos^2 4\beta - \cos 8\beta$; 7) $4\sin^4 x + \sin^2 2x$.

96. Преобразуйте выражение:

1) $\sin 2t \operatorname{ctg} t - 1$; 7) $\operatorname{ctg}\beta(1 - \cos 2\beta)$;
2) $\dfrac{\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$; 8) $\dfrac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$;
3) $\dfrac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$; 9) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)\sin 2t$;
4) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 10) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$;
5) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$; 11) $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$;
6) $\dfrac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta}$; 12) $\left(\dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta} + \dfrac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}\right)\sin 2\beta$.

97. Выполните преобразование:

1) $\dfrac{2\cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha)$;
2) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$; 6) $\dfrac{(\sin\beta + \cos\beta)^2}{1 + \sin 2\beta}$;
3) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 7) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$;
4) $\dfrac{1 + \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$; 8) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right)\sin 2\alpha$.

$\boxed{98}$. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \times \ldots \times \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$;
2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$.

(*Указание*: представьте $3 = 2 + 1$, $1 = 2 - 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $2 = 2 \cdot 1$).

87. Применить формулы двойного угла к следующим выражениям:

1) $\sin 80°$; 2) $\sin 4\varphi$; 3) $\sin 15y$; 4) $\dfrac{\sin 66°}{2\sin 33°}$;

5) $\cos 46°$; 6) $\cos 6\beta$; 7) $\cos 13x$; 8) $\dfrac{\cos 20°}{\sin 10° + \cos 10°}$;

9) $\operatorname{tg} 72°$; 10) $\operatorname{tg} 8\gamma$; 11) $\operatorname{tg} 11\varphi$; 12) $\dfrac{2\operatorname{tg} 70°}{1 - \operatorname{tg}^2 70°}$.

88. Применить формулы двойного угла к следующим выражениям:

1) $\sin 42°$; 2) $\sin 10\alpha$; 3) $\dfrac{\sin 50°}{\cos 25°}$;

4) $\cos 38°$; 5) $\cos 12\beta$; 6) $\dfrac{\cos 18° - \sin 18°}{\cos 36°}$;

7) $\operatorname{tg} 54°$; 8) $\operatorname{tg} 14\gamma$; 9) $\dfrac{2\operatorname{tg} 10°}{1 - \operatorname{tg}^2 10°}$.

Вычислите:

89. а) $\sin 15°$; б) $\cos 75°$.

90. а) $\cos 15°$; б) $\sin 75°$.

$\boxed{91}$. 1) $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$;

2) $\sin\dfrac{7\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{\pi}{18}$;

3) $\cos\dfrac{\pi}{11}\cos\dfrac{2\pi}{11}\cos\dfrac{3\pi}{11}\cos\dfrac{4\pi}{11}\cos\dfrac{5\pi}{11}$.

92. Дано: $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

93. Дано: $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

94. Упростите выражения:

1) $2\cos^2 x \operatorname{tg} x$;
2) $\cos 6\gamma + \sin^2 3\gamma$;
3) $\cos 2\beta - 2\cos^2 \beta$;
4) $1 + \cos 2\alpha$;
5) $8\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos 4\alpha$;
6) $1 + 2\cos^2 t - \cos 2t$;
7) $4\sin^4 x + \sin^2 2x$;
8) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

55. Упростите выражения:

1) $\sin^2 x - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$;
2) $\sin^2 4\alpha + \operatorname{tg}^2\varphi + \cos^2 4\alpha$;
3) $\operatorname{tg} 3 \operatorname{ctg} 3 + \operatorname{ctg}^2 x$;
4) $7 - 4\sin^2\beta - 4\cos^2\beta$;
5) $\cos\varphi \operatorname{ctg}\varphi \sin\varphi - 1$;
6) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)$;
7) $\dfrac{1}{\cos^2 2t} - \operatorname{tg}^2 2t$;
8) $\dfrac{1}{\sin^2 3x} - \operatorname{ctg}^2 3x - \sin^2\alpha$;
9) $1 - \dfrac{1}{\sin^2 2x}$;
10) $\sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha$;
11) $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x$;
12) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
13) $\cos^2 t + \operatorname{ctg}^2 t \cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t$;
14) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$;
15) $\dfrac{\sin^2\beta}{1 - \sin^2\beta}\operatorname{ctg}^2\beta$;
16) $\dfrac{1 - \cos^2 3x}{1 - \sin^2 3x}$;
17) $\dfrac{\cos^2 5\alpha}{2\cos\frac{\pi}{3} - \sin 5\alpha}$;
18) $\dfrac{\cos^2 x - \cos^2 0}{\sin^2 x - \sin^2\frac{\pi}{2}}$.

56. Преобразуйте выражения:

1) $\operatorname{ctg} t - \dfrac{\cos t - 1}{\sin t}$;
2) $\dfrac{\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;
3) $\sin x + \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$;
4) $\dfrac{(\sin t \operatorname{ctg} t)^2}{\sin^2 t - 1} + \cos^2 t$;
5) $2\sin\beta - \dfrac{\cos\beta - \cos^3\beta}{\sin\beta\cos\beta}$;
6) $\dfrac{1 - 2\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi - 1} - \cos^2\varphi$;
7) $(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$;
8) $\dfrac{(\sin 2x + \cos 2x)^2 - 1}{2\sin 2x \operatorname{ctg} 2x}$;
9) $\sin t \cos t (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$;
10) $\sin t - \cos t (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$;
11) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$;
12) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

57. Замените выражение ему равным:

1) $\cos^2\alpha-(\mathrm{ctg}^2\alpha+1)\sin^2\alpha$;

2) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x$;

3) $\mathrm{tg}^2\alpha+\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha}$;

4) $\dfrac{1-2\sin^2\gamma}{\sin\gamma-\cos\gamma}+\cos\gamma$;

5) $\mathrm{ctg}^2 t-\dfrac{1-2\cos^2 t}{1-2\sin^2 t}$;

6) $\dfrac{\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\alpha-\sin^3\alpha}-1$;

7) $(\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha)\mathrm{ctg}\,\alpha$;

8) $\dfrac{1-(\cos3\alpha-\sin3\alpha)^2}{2\cos3\alpha\,\mathrm{tg}3\alpha}$;

9) $\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$;

10) $\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

11) $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2+(1-\mathrm{tg}\,\alpha)^2$;

12) $(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2-(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2$.

58. Зная значение одной функции угла α, найдите значения остальных тригонометрических функций этого угла:

1) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13},\quad \pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha=0{,}6,\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

59. Вычислите остальные три тригонометрические функции, если:

1) $\sin\alpha=-\dfrac{9}{41},\quad \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\dfrac{7}{24},\quad \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

60. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\beta+1}{1+\mathrm{ctg}\,\beta}$;

2) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$;

4) $\dfrac{(\sin t+\cos t)^2-1}{\mathrm{tg}\,t-\sin t\cos t}$;

5) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}$;

6) $\dfrac{2\sin x\cos x-\cos x}{1-\sin x+\sin^2 x-\cos^2 x}$;

7) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha$;

8) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha$;

9) $\dfrac{2\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}-2\cos\varphi$;

10) $\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}$;

11) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

12) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

$\boxed{81}$. Тангенсы трех острых углов соответственно равны $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{7}$. Докажите, что первый угол равен сумме двух других углов.

$\boxed{82}$. Синусы острых углов треугольника соответственно равны $\dfrac{20}{29}$ и $\dfrac{3}{5}$. Найдите косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.

83. Вычислите:

1) $\mathrm{tg}\,420°+2\cos870°-2\cos1410°$;

2) $\mathrm{ctg}\,585°-2\cos1080°+\sqrt{2}\sin1125°$;

3) $3\mathrm{tg}\,930°+\sin1200°-\cos1770°$.

84. Найдите значение выражения:

1) $3\mathrm{tg}\,570°-2\cos1350°+2\sin1200°$;

2) $\mathrm{ctg}\,510°-2\cos765°-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,855°$;

3) $2\sin750°+\sin1230°+\mathrm{ctg}\,1395°$.

85. Преобразуйте в синус, косинус или тангенс некоторого угла выражение:

1) $2\sin\varphi\cos\varphi$;

2) $2\sin12°\cos12°$;

3) $2\cos105°\sin105°$;

4) $4\sin\varphi\cos\varphi\cos2\varphi$;

5) $7\sin\dfrac{x}{6}\cos\dfrac{x}{6}\cos\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{2x}{3}$;

6) $8\cos2x\cos4x\cos8x$;

7) $\cos^2 70°-\sin^2 70°$;

8) $\cos^2 112{,}5°-\sin^2 67{,}5°$;

9) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

10) $\sin^2 3x-\cos^2 3x$;

11) $\cos^2\dfrac{5\beta}{2}-\sin^2\dfrac{5\beta}{2}$;

12) $\sin^2\dfrac{3\pi}{8}-\cos^2\dfrac{3\pi}{8}$.

86. Упростите выражение:

1) $2\sin2\varphi\cos2\varphi$;

2) $2\cos72°\sin72°$;

3) $3\sin\beta\cos\beta\cos2\beta$;

4) $16\cos3x\cos6x\cos12x$;

5) $\cos^2 75°-\sin^2 75°$;

6) $\cos^2 22{,}5°-\sin^2 22{,}5°$;

7) $\cos^2 5\alpha-\sin^2 5\alpha$;

8) $\sin^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{\pi}{12}$.

77. Вычислите:

1) $\cos 73° \sin 103° + \cos 17° \sin 13°$;
2) $\sin 170° \cos 20° + \sin 20° \cos 350°$;
3) $\cos 118° \cos 28° - \cos 152° \sin 28°$;
4) $\cos 5° \cos 40° - \sin 140° \sin 175°$;
5) $\dfrac{\cos 34° \cos 154° + \sin 386° \sin 34°}{\sin 53° \cos 8° - \cos 53° \sin 172°}$;
6) $\cos 73° \sin 107° + \sin 73° \sin 197°$;
7) $\cos 109° \cos 49° + \cos 41° \sin 71°$;
8) $\sin 7° \cos 217° + \cos 7° \cos 53°$;
9) $\sin 22° \cos 203° + \cos 22° \cos 113°$;
10) $\dfrac{\cos 378° \sin 27° + \cos 27° \sin 18°}{\sin 158° \sin 52° + \cos 52° \cos 22°}$.

78. Найдите значение выражения:

1) $\sin 49° \cos 11° + \cos 229° \cos 101°$;
2) $\sin 43° \cos 13° + \cos 103° \sin 47°$;
3) $\dfrac{\sin 24° \cos 6° - \sin 6° \sin 66°}{\sin 21° \cos 39° - \cos 51° \sin 69°}$;
4) $\dfrac{\operatorname{ctg} 78° - \operatorname{ctg} 303°}{1 + \operatorname{tg}(-192°) \operatorname{ctg} 237°}$;
5) $\cos 11° \sin 236° - \sin 214° \sin 11°$;
6) $\sin 175° \cos 140° - \sin 85° \cos 50°$;
7) $\dfrac{\cos 54° \cos 7° - \cos 36° \sin 7°}{\sin 73° \cos 44° - \cos 73° \cos 46°}$;
8) $\dfrac{\operatorname{tg} 225° - \operatorname{ctg} 81° \operatorname{ctg} 69°}{\operatorname{ctg} 261° + \operatorname{tg} 201°}$.

79. Упростите выражения:

1) $\cos(3\pi - \beta) + \operatorname{ctg}(3{,}5\pi - \beta) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi + \beta)$;
2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin\alpha + \cos^2(3\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(5\pi + \alpha) \operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$.

80. Преобразуйте выражения:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi - \beta) - \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{tg}(2\pi + \beta)$;
3) $\dfrac{\cos(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} - \dfrac{\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

61. Преобразуйте выражения:

1) $\operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$;
2) $\dfrac{\cos\beta}{1 - \sin\beta} - \operatorname{tg}\beta$;
3) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$;
4) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$;
5) $\dfrac{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha + 4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha + 1)}$;
6) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$;
7) $\operatorname{tg}\gamma \dfrac{1 - \operatorname{ctg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\gamma}$;
8) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2}$;
9) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 t + 1}{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2}$.

$\boxed{62}$. Докажите тождество:

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;
2) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
3) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = (1 + \sin\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\alpha)$;
4) $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = (1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
5) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right) : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - 1) = \sin\alpha + \cos\alpha$;
6) $\left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \dfrac{1}{\cos x}\right)^2 = 7 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

$\boxed{63}$. Покажите, что при всех допустимых значениях углов значение выражения не зависит от величины угла:

1) $\sin^2\alpha\,(2 + \operatorname{ctg}\alpha)(2\operatorname{ctg}\alpha + 1) - 5\sin\alpha\cos\alpha$;
2) $\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta$;
3) $\dfrac{(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 1)(\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)}{(\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1)}$;
4) $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$;
5) $\dfrac{\cos^4\beta - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \sin^2\beta \cdot \cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta}$;
6) $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$.

64. Вычислите:

1) $\sin 17° \cos 13° + \cos 17° \sin 13°$;
2) $\sin 9° \cos 99° - \sin 99° \cos 9°$;
3) $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}$;
4) $\sin 15° \sin 15° - \cos 15° \cos 15°$;
5) $\frac{\sin 20°\cos 5° - \sin 5°\cos 20°}{\cos 10°\cos 5° - \sin 10°\sin 5°} - \mathrm{tg}\,15°$;
6) $\sin 20° \cos 50° - \cos 20° \sin 50°$;
7) $\cos 10° \cos 35° - \sin 35° \sin 10°$;
8) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}$;
9) $\sin 22{,}5° \sin 22{,}5° - \cos 22{,}5° \cos 22{,}5°$;
10) $\frac{\cos 18°\cos 28° - \sin 18°\sin 28°}{\sin 34°\sin 12° - \cos 12°\cos 34°}$.

65. Найдите значение выражения:

1) $\sin 10° \cos 20° + \sin 20° \cos 10°$;
2) $\sin 50° \cos 20° - \cos 50° \sin 20°$;
3) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{20}$;
4) $\frac{\sin 37°\cos 7° - \cos 37°\sin 7°}{\cos 47°\cos 17° + \sin 17°\sin 47°}$;
5) $\frac{\sin 0{,}3\pi\cos(-2{,}8\pi) + \cos 0{,}3\pi\sin(-2{,}8\pi)}{\cos 0{,}3\pi\cos 2{,}3\pi - \sin 0{,}3\pi\sin(-2{,}3\pi)}$;
6) $\cos 109° \cos 49° + \sin 109° \sin 49°$;
7) $\cos 71° \sin 11° - \sin 71° \cos 11°$;
8) $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$;
9) $\frac{\mathrm{tg}\,31° + \mathrm{tg}\,14°}{1 - \mathrm{tg}\,31°\,\mathrm{tg}\,14°}$;
10) $\frac{\mathrm{tg}\,74° - \mathrm{tg}\,14°}{1 + \mathrm{tg}\,74°\,\mathrm{tg}\,14°}$.

66. Упростите выражения:

1) $\frac{\sin(2\alpha+\varphi)+\sin(2\alpha-\varphi)}{\sin(2\alpha+\varphi)-\sin(2\alpha-\varphi)}$;
2) $\frac{\sin(5\varphi+\beta)-\sin\beta\cos 5\varphi}{\sin(5\varphi-\beta)+\sin\beta\cos 5\varphi}$;
3) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;
4) $\frac{\cos(3x+a)+\sin 3x\sin a}{\cos(3x-a)-\sin 3x\sin a}$;
5) $\frac{\cos(\alpha-3\beta)-\sin 3\beta\sin\alpha}{\cos(3\beta+\alpha)+\sin\alpha\sin 3\beta}$;
6) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

67. Упростите следующие выражения:

1) $\frac{\sin(3a+2b)-\sin(2b-3a)}{\cos(2b+3a)+\cos(2b-3a)}$;
2) $\frac{\sin(\alpha-2\beta)+2\cos\alpha\sin 2\beta}{2\cos\alpha\cos 2\beta-\cos(\alpha-2\beta)}$;
3) $\frac{\sin(45°-\alpha)+\cos(45°-\alpha)}{\sin(45°-\alpha)-\cos(45°-\alpha)}$;
4) $\frac{\mathrm{tg}\,3\alpha+\mathrm{tg}\,7\alpha}{1-\mathrm{tg}\,3\alpha\,\mathrm{tg}\,7\alpha}$.

Дано:

68. $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$; $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{2}$. Найти: а) $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$; б) $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)$.

69. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = -\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin(\alpha-\beta)$.

$\boxed{70}$. $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\sin\beta = \frac{4}{5}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найти $\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)$.

$\boxed{71}$. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, $\sin\gamma = \frac{7}{25}$, $\alpha,\beta,\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

$\boxed{72}$. Упростите выражения:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$;
2) $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

73. Замените тригонометрической функцией угла α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;
2) $\mathrm{ctg}\,(\pi+\alpha)$;
3) $\cos(2\pi-\alpha)$;
4) $\sin(2\pi+\alpha)$;
5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;
6) $\mathrm{tg}\,(180°-\alpha)$;
7) $\sin(180°+\alpha)$;
8) $\mathrm{ctg}\,(360°-\alpha)$;
9) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
10) $\cos(90°-\alpha)$;
11) $\sin(270°-\alpha)$;
12) $\mathrm{tg}\,(270°+\alpha)$.

74. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;
2) $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$;
3) $\mathrm{tg}\,(\alpha-2\pi)$.

75. Преобразуйте выражение:

1) $\sin^2(\pi+\alpha)$;
2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

76. Приведите к тригонометрической функции угла α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
2) $\mathrm{tg}\,(\pi+\alpha)$;
3) $\cos(2\pi+\alpha)$;
4) $\mathrm{tg}\,(90°-\alpha)$;
5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
6) $\mathrm{ctg}\,(\pi-\alpha)$;
7) $\sin(\pi+\alpha)$;
8) $\cos(90°+\alpha)$;
9) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;
10) $\cos(\alpha-\pi)$;
11) $\mathrm{ctg}\,(\alpha-360°)$;
12) $\mathrm{tg}\,(-\alpha+270°)$.