

§ 17. Логарифмические уравнения

17.1. а) $\log_2 x = 3$;

б) $\log_7 x = -1$;

17.2. а) $\log_x 16 = 2$;

б) $\log_x \frac{1}{8} = -3$;

в) $\log_{0,3} x = 2$;

г) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$.

в) $\log_x \sqrt{3} = -1$;

г) $\log_x 9 = \frac{1}{2}$.

○17.3. а) $\log_{\sqrt{2}}(2x + 1) = 6$;

б) $\log_{\sqrt{3}+1}(3x + 2\sqrt{3}) = 2$;

в) $\log_{2\sqrt{2}} 16x = 4$;

г) $\log_{\sqrt{5}-1}(3x - 2\sqrt{5}) = 2$.

○17.5. а) $\log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2 + x - 5) = -1$;

в) $\log_7(x^2 - 12x + 36) = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 1) = -2$.

17.6. а) $\log_2(3x - 6) = \log_2(2x - 3)$;

б) $\log_6(14 + 4x) = \log_6(2x + 2)$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(7x - 9) = \log_{\frac{1}{6}} x$;

г) $\log_{0,2}(12x + 8) = \log_{0,2}(11x + 7)$.

17.7. а) $\log_{\frac{1}{2}}(7x^2 - 200) = \log_{\frac{1}{2}} 50x$;

б) $\log_{0,3}(-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3}(10x - 7)$;

в) $\lg(x^2 - 8) = \lg(2 - 9x)$;

г) $\log_{0,2}(-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2}(-x - 31)$.

17.8. а) $2^{\log_2(x^2-4)} = 21$;

в) $9^{\log_9(x^2-5)} = 31$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-9x+21)} = 1$;

г) $(0,3)^{\log_{0,3}(x^2+x-1)} = 2$.

17.9. а) $3^{\log_4(-5x)} = \log_5 125$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(9x-10)} = \log_9 729$;

б) $2^{\log_3(2x+8)} = \log_{\sqrt{3}} 9$;

г) $(0,2)^{\log_{0,7}(-3x+1)} = \log_2 0,5$.

●17.12. Решите уравнение:

а) $\log_2(2x^3 - x^2 - 2x) = \log_2(x^3 + 2x^2 + 2x)$;

б) $\log_3(3x^3 - 2x^2 + 4x) = \log_3(2x^3 + 2x^2 + 3x - 6)$;

в) $\log_{0,2}(x^3 + 5x^2 + 6x + 1) = \log_{0,2}(-x^3 + 2x^2 + 3x)$;

г) $\log_{0,4}(2x^3 + x^2 - 5x - 7) = \log_{0,4}(x^3 - 2x^2 - 2x + 7)$.

17.13. а) $\log_x(x + 3) = \log_x(2x + 9)$;

б) $\log_x(x^2 - 2x) = \log_x(3x - 4)$;

в) $\log_x(x - 1) = \log_x(2x - 8)$;

г) $\log_x(x^2 - 6) = \log_x(-x)$.

17.14. а) $\log_x(2x^2 + x - 2) = 3$; б) $\log_{x-1}(12x - x^2 - 19) = 3$.

17.15. а) $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 18$;

б) $\log_7 4 = \log_7 x - \log_7 9$; г) $\log_{0,4} 9 - \log_{0,4} x = \log_{0,4} 3$.

17.16. а) $2 \log_8 x = \log_8 2,5 + \log_8 10$;

б) $3 \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x$;

в) $3 \log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

г) $4 \log_{0,1} x = \log_{0,1} 2 + \log_{0,1} 8$.

17.17. а) $\log_3(x - 2) + \log_3(x + 2) = \log_3(2x - 1)$;

б) $\log_{11}(x + 4) + \log_{11}(x - 7) = \log_{11}(7 - x)$;

в) $\log_{0,6}(x + 3) + \log_{0,6}(x - 3) = \log_{0,6}(2x - 1)$;

г) $\log_{0,4}(x + 2) + \log_{0,4}(x + 3) = \log_{0,4}(1 - 2x)$.

17.18. а) $\log_{23}(2x - 1) - \log_{23} x = 0$;

б) $\log_{0,5}(4x - 1) - \log_{0,5}(7x - 3) = 1$;

в) $\log_{3,4}(x^2 - 5x + 8) - \log_{3,4} x = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 9) - \log_{\frac{1}{2}}(8 - 3x) = 2$.

$$17.19. \text{ a) } \log_2(x-3)(x+5) + \log_2 \frac{x-3}{x+5} = 2;$$

$$\text{б) } \log_3(x+3)(x+5) + \log_3 \frac{x+3}{x+5} = 4.$$

$$17.20. \text{ a) } \lg(x-1)^3 - 3 \lg(x-3) = \lg 8;$$

$$\text{б) } \lg(x+1)^5 - 5 \lg(x-1) = \lg 32.$$

$$17.21. \text{ a) } \log_2(x^3 - 1) - \log_2(x^2 + x + 1) = 4;$$

$$\text{б) } \log_{0,5}(x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8) = -3;$$

$$\text{в) } \log_{0,3}(x^3 + 27) - \log_{0,3}(x^2 - 3x + 9) = -1;$$

$$\text{г) } \log_5(x^6 + 9x^4 + 27x^2 + 27) = 3.$$

$$17.22. \text{ a) } \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0;$$

$$\text{б) } \log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0;$$

$$\text{в) } \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0;$$

$$\text{г) } \log_{0,2}^2 x + \log_{0,2} x - 6 = 0.$$

$$17.23. \text{ a) } 2 \log_5^2 x + 5 \log_5 x + 2 = 0;$$

$$\text{б) } 3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 = 0;$$

$$\text{в) } 2 \log_{0,3}^2 x - 7 \log_{0,3} x - 4 = 0;$$

$$\text{г) } 3 \log_{0,5}^2 x + 5 \log_{0,5} x - 2 = 0.$$

$$17.26. \text{ a) } \frac{\log_2 x + 5}{\log_2 x - 1} + 1 = 0;$$

$$\text{в) } \frac{9 \log_{0,5} x + 14}{3 - 2 \log_{0,5} x} - 1 = 0;$$

$$\text{б) } \frac{7 \log_3 x - 15}{5 \log_3 x + 3} + 1 = 0;$$

$$\text{г) } \frac{-19 \lg x + 20}{4 - 5 \lg x} - 4 = 0.$$

$$17.33. \text{ a) } x^{\log_3 x} = 81;$$

$$\text{в) } x^{\log_2 x} = 16;$$

$$\text{б) } x^{\log_{0,5} x} = \frac{1}{16};$$

$$\text{г) } x^{\log_3 x} = \frac{1}{81}.$$

$$17.34. \text{ a) } x^{\lg x - 2} = 1000;$$

$$\text{в) } x^{5 + \log_2 x} = \frac{1}{16};$$

$$\text{б) } x^{\log_{0,5} x - 2} = 0,125;$$

$$\text{г) } x^{\log_3 x - 4} = 27.$$

$$17.35. \text{ a) } 10x^{\lg x} + x^{-\lg x} = 11;$$

$$\text{б) } x^{\log_2 x} + 32x^{-\log_2 x} = 3^{2 + \log_3 2}.$$

$$17.36. \text{ a) } 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12;$$

$$\text{б) } 10^{\lg^2 x} + 9x^{\lg x} = 1000.$$

$$17.37. \text{ a) } \log_5(6 - 5^x) = 1 - x;$$

$$\text{б) } \log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1.$$

$$17.38. \text{ a) } \log_9(3^x + 2x - 20) = x - x \log_9 3;$$

$$\text{б) } 0,4^{\lg^2 x - 1} = 6,25^{-2 - \lg x^2}.$$

Решите систему уравнений:

$$17.40. \text{ a) } \begin{cases} \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y = 7, \\ \log_3(x^2 + 4x - 3) - \log_3 y = 1. \end{cases}$$

$$17.41. \text{ a) } \begin{cases} \log_5(x + y) = 1, \\ \log_6 x + \log_6 y = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_{0,5}(x + 2y) = \log_{0,5}(3x + y), \\ \log_7(x^2 - y) = \log_7 x; \end{cases}$$

§ 18. Логарифмические неравенства

18.1. а) $\log_2 x \geq 4$;

в) $\log_2 x < \frac{1}{2}$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x > -3$;

г) $\log_{0,1} x \leq -\frac{1}{2}$.

18.2. а) $\log_5 (3x + 1) < 2$;

в) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{5} > 1$;

б) $\log_{0,5} \frac{x}{3} \geq -2$;

г) $\log_{\sqrt{3}} (2x - 3) < 4$.

18.3. а) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

б) $3 \log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

в) $\log_5 x - \log_5 35 \leq \log_5 \frac{1}{7}$;

г) $4 \log_{0,6} x \geq \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2$

18.4. а) $\log_5 x > \log_5 (3x - 4)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} (5x - 9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x$;

б) $\log_{0,6} (2x - 1) < \log_{0,6} x$;

г) $\log_3 (8 - 6x) \leq \log_3 2x$.

18.5. а) $\log_2 (5x - 9) \leq \log_2 (3x + 1)$;

б) $\log_{0,4} (12x + 2) \geq \log_{0,4} (10x + 16)$;

в) $\log_{\frac{2}{3}} (-x) > \log_{\frac{2}{3}} (4 - 2x)$;

г) $\log_{2,5} (6 - x) < \log_{2,5} (4 - 3x)$.

18.6. а) $\log_{\sqrt{2}-1} (7x - 21) \leq \log_{\sqrt{2}-1} (21 - 3x)$;

б) $\log_{\sqrt{2}+1} (2x + 7) > \log_{\sqrt{2}+1} (19 - 6x)$;

в) $\log_{\pi} (5x - 15) \geq \log_{\pi} (15 - 3x)$;

г) $\log_{2-\sqrt{3}} (4x + 17) < \log_{2-\sqrt{3}} (25 - 5x)$.

○18.7. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $\log_7 (6x - 9) < \log_7 (2x + 3)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} (2 - x) \geq \log_{\frac{1}{5}} (2x + 4)$;

в) $\lg (8x - 16) < \lg (3x + 1)$;

г) $\log_{0,4} (7 - x) \geq \log_{0,4} (3x + 6)$.

Решите неравенство:

○18.8. а) $\log_3 (x^2 + 6) < \log_3 5x$;

б) $\log_{0,6} (6x - x^2) > \log_{0,6} (-8 - x)$;

в) $\lg (x^2 - 8) \leq \lg (2 - 9x)$;

г) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 + 10x) \geq \log_{\sqrt{2}} (x - 14)$.

○18.9. а) $\log_{\pi-3} (6 - x) \geq \log_{\pi-3} x^2$;

б) $\log_{\pi-2} (x^2 + 22) < \log_{\pi-2} 13x$;

в) $\log_{3-0,5\pi} (-x - 6) \leq \log_{3-0,5\pi} (6 - x^2)$;

г) $\log_{3,2-\pi} (x^2 - 27) > \log_{3,2-\pi} 6x$.

○18.10. а) $\log_2 \frac{4-x}{x-2} \leq \log_2 \frac{1}{x-2}$;

б) $\log_{0,5} \frac{7}{3x-2} > \log_{0,5} \frac{4x}{3x-2}$.

○18.11. а) $\log_8 (x^2 - 7x) > 1$;

в) $\log_2 (x^2 - 6x + 24) < 4$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 0,5x) \leq 1$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \left(-x^2 + \frac{10}{9}x \right) \geq 2$.

●18.12. Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-2}{2x-3} > -1$;

в) $\log_6 \frac{7x-4}{x+2} \leq 0$;

б) $\log_5 (2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x}) < 1$;

г) $\log_{0,1} (7x^2 - x^4) > -1$.

О18.13. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $\log_{12}(x^2 - x) \leq 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 10x + 9) \geq 0$;

в) $\log_9(x^2 - 8x) \leq 1$;

г) $\log_{0,3}(-x^2 + 7x - 5) < 0$?

Решите неравенство:

О18.14. а) $\log_{\frac{1}{3}}x + \log_{\frac{1}{3}}(4 - x) > -1$;

б) $\log_2(7 - x) + \log_2x \geq 1 + \log_23$;

в) $\lg(7 - x) + \lgx > 1$;

г) $\log_{\frac{1}{2}}x + \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) \geq -1 + \log_{\frac{1}{2}}4,5$.

О18.15. а) $\lg(x + 3) + \lg(2x - 8) < 2 \lgx$;

б) $\log_{0,5}(3x - 1) - \log_{0,5}(x - 1) < \log_{0,5}(x + 18) - \log_{0,5}(x + 2)$;

в) $\log_3(2x - 7) \geq 2 \log_3(x + 1) - \log_3(x - 19)$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) \geq \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}x^2 + \log_{\frac{1}{3}}(4x - 9)$.

О18.16. а) $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) < \log_2(x^3 - x^2 + 4x - 3)$;

б) $\lg(x^3 - x^2 - x + 20) \geq \lg(x + 2) + \lg(x^2 - 2x + 4)$.

О18.17. а) $\log_2^2x > 4 \log_2x - 3$; в) $\log_4^2x - \log_4x \leq 2$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}^2x + 3 \log_{\frac{1}{2}}x < -2$; г) $\log_{0,2}^2x \geq 6 - \log_{0,2}x$.

г) $\log_3^2x + 3 \log_39x - 24 < 0$.

18.18. а) $2 \log_{0,3}^2(x + 1) - 7 \log_{0,3}(x + 1) - 4 \leq 0$;

б) $3 \log_4^2x - 7 \log_416x + 30 < 0$;

в) $3 \log_{\frac{1}{3}}^2(2x + 1) + 5 \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) - 2 > 0$;

г) $\log_3^2x + 3 \log_39x - 24 < 0$.

18.19. а) $\log_2^2x^2 - 15 \log_22x + 11 \leq 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}^2(x^2 - 2x + 1) - 7 \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + 3 \leq 0$;

в) $2 \log_5^2x^2 + 5 \log_525x - 8 \geq 0$;

г) $\log_{\frac{1}{5}}^2(x^2 + 2x + 1) - 31 \log_{\frac{1}{5}}\frac{x + 1}{5} + 15 < 0$.

18.20. а) $\log_2^2(5 - x) - 2 \log_2(5 - x)^3 + 9 \leq 0$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}^2(4 - x) + 5 \log_{\frac{1}{2}}(4 - x)^2 + 25 \leq 0$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}^2(x - 1) + 3 \geq -\frac{4}{5} \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)^5$;

г) $\log_3^2(x + 5) \leq 0,5 \log_3(x + 5)^4 + 3$.

18.21. а) $\frac{1 - \log_4x}{1 + 2 \log_4x} \leq \frac{1}{2}$;

б) $\frac{3 \log_{0,5}x}{2 - \log_{0,5}x} \geq 2 \log_{0,5}x + 1$;

в) $\left(\log_{\frac{1}{2}}x + 2 \right) \left(2 - \log_{\frac{1}{2}}x \right) < \log_{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{64}$;

г) $\frac{\log_{0,2}x + 3}{\log_{0,2}x - 3} \leq \frac{1}{3}$.

18.22. а) $\frac{1}{\log_2x - 4} > \frac{1}{\log_2x}$; в) $\frac{4}{\lg10x} - \frac{5}{\lg100x} \geq 0$;

б) $\frac{1}{1 - \lgx} < \frac{2 \lgx - 5}{1 + \lgx}$; г) $2 + \frac{\log_2^2x}{1 + \log_2x} > \log_2x$.

○18.28. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $\log_4(\sqrt{x} - 1) + \log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x} + 1) < \log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x} + 2)$;

б) $\log_{\pi}(\sqrt[3]{x} - 5) + \log_{\frac{1}{\pi}}(\sqrt[3]{x} + 1) < \log_{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{3} - \log_{\pi}(\sqrt[3]{x} + 1)$.

Решите неравенство:

○18.29. а) $\log_{5x-1} 2 \leq 0$;

в) $\log_{2-3x} 5 > 0$;

б) $\log_{3x+4} 0,2 > 0$;

г) $\log_{5-x} 0,3 \leq 0$.

○18.30. а) $\log_{3x-1} 16 < 2$;

б) $\log_{x-2} 27 < 3$.

○18.31. а) $\log_x \sqrt{21 - 4x} > 1$;

б) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$.

○18.32. а) $\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x)$;

б) $\log_{2x-1}(3x - 5) < \log_{2x-1}(15 - 7x)$.

●18.33. а) $\log_{\cos x} \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 1$;

в) $\log_{\sin x} \frac{1}{2} \geq 1$;

б) $\log_{\sin x} 1 \leq 2$;

г) $\log_{\cos x} \frac{1}{2} \leq 2$.

●18.34. а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{27} + \frac{2 \sin x}{27} \right) < -1$;

б) $\log_3 \log_4(96 + 64 \cos x) \geq 1$.

●18.35. а) $\log_{x^2-3} 729 > 3$;

в) $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$;

б) $\log_{10-x^2} \left(\frac{16}{5}x - x^2 \right) < 1$;

г) $\log_{4-x}(x^2 - 10) < 2$.

○18.36. а) $\log_2 x + 1 \geq 2 \log_x 2$;

б) $2 \log_x 5 - 3 \leq -\log_5 x$.

●18.37. а) $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 \leq 1$;

б) $1 + \log_x 5 \cdot \log_7 x > \log_5 35 \cdot \log_x 5$.

●18.38. а) $\log_9 x^2 + \log_3^2(-x) < 2$;

б) $\log_4 x^2 + \log_2^2(-x) > 6$.

●18.39. а) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$;

б) $\log_x 5 \cdot \log_{5x} 5 \cdot \log_5 625x < 1$.

○18.43. а) $(4x - 1) \log_2 x \geq 0$;

б) $(x + 2) \log_{1,5}(4 - x) \geq 0$.

○18.44. а) $(4x^2 - 16x + 7) \log_2(x - 3) > 0$;

б) $\frac{\log_{0,3}(x - 1)}{\sqrt{5x - x^2}} \leq 0$.

○18.45. а) $\log_{0,5} \left(\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} \right) \right) > 0$;

б) $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{3x - 1}{x + 1} \right) \right) > 0$;

в) $\log_{0,2} \left(\log_{0,3} \left(\log_{0,4} \frac{1}{x + 1} \right) \right) < 0$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \left(\frac{x^2 - 2x}{x - 3} \right) \right) < 0$.

●18.46. а) $\log_{5x-4x^2}(4^{-x}) > 0$;

б) $\log_{-5x^2-6x}(6^x) > 0$.